CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: 17.06.2019

Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Mat 302 Diferansiyel Geometri II Bütünleme Sınav Soruları

1. $M=\{(x,y,z): z^2=x^2+y^2\}$ kümesinin yüzey olup olmadığını araştırınız.

2. M, E^3 de bir hiperyüzey olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla, I, II ve III ve Gauss eğriliği K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere

$$III-2HII+KI=0$$

olduğunu gösteriniz.

3. $F:E^2\to E^2$, $F(x,y)=(y^3, x^4y+xy^3)$ dönüşümünün difeomorfizmliğini araştırınız.

4. $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(t^2,t,0)$ ve $H=(2,1,1)$ olsun. Dayanak eğrisi α ve tepe noktası H olan koni yüzeyinin denklemini bulunuz.

5. E^n nin topolojik manifold olduğunu gösteriniz.

Başarılar

Prof. Dr. Emin KASAP

1- $M = \{(x,y,z) \in E^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ kümesi için

$$f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

fonksiyonunu belirleyelim. Buradan, gradient vektörü

$$\vec{\nabla} f = (-2x, -2y, 2z)$$

şeklinde bulunur.

[Bir $M \subset E^n$ alt kümesinin yüzey olmasının her $P \in M$ noktasında $\vec{\nabla} f|_P \neq 0$ olmasıyla mümkün olduğu biliniyor.]

Verilen M kümesinde; $P = (0,0,0) \in M$ noktası için

$$\vec{\nabla} f|_P = (0,0,0)$$

olur ki M, E^3 de yüzey değildir.

2. $n = 3$ için $boy M = 2$ olduğundan $boy T_M(P) = 2$ dir. O halde, S şekil operatörünün karakteristik polinomu 2. derecedendir. k_1 ve k_2 asli eğrilikleri bu polinomun birer kökleri olmak üzere

$$P_S(\lambda) = \lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2$$

yazılır.

Cayley-Hamilton teoremine göre

$$S^2 - (k_1+k_2)S + k_1 k_2 I_2 = 0$$

yazılır. Buradan, $\forall X_p \in T_M(P)$ için

$$S^2(X_p) - (k_1+k_2)S(X_p) + k_1 k_2 X_p = 0$$

ve $\forall Y_p \in T_M(P)$ için

$$\langle S^2(X_p) - (k_1+k_2)S(X_p) + k_1 k_2 X_p , Y_p \rangle = 0$$

dır. O halde iç çarpım fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\langle S^2(X_p), Y_p \rangle - (k_1+k_2)\langle X_p, Y_p \rangle + k_1 k_2 \langle X_p, Y_p \rangle = 0$$

olup $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ ve $\det S_p = k_1 k_2 = K$ değerli ile

ve I. II ve III. temel formlara göre

$$\text{III} - 2H\,\text{II} + K\,\text{I} = 0$$

elde edilir.

3- Bir dönüşümün difeomorfizmliği türev dönüşümünün jakobien matrisinin rankı ile ilişkilidir. Yani,

$F: E^n \to E^m$ dönüşümü için

$\text{rank}(J(F,P)) = n$ ise o zaman $P \in E^n$ noktasının bir U açığı, $F(P) \in E^m$ noktasının bir V açığı üzerine bir difeomorfizmdir.

$$F: E^2 \to E^2$$
$$(x,y) \to F(x,y) = (\underbrace{y^3}_{=f_1}, \underbrace{x^4y + xy^3}_{=f_2})$$

$$J(F,P) = \begin{bmatrix} 0 & 3y^2(P) \\ 4x^3(P)y(P) + y^3(P) & x^4(P) + 3x(P)y^2(P) \end{bmatrix}$$

Jakobien matrisinin rankının 2 olmasını inceleyelim. Bunun için $|J(F,P)|$ determinantına bakalım.

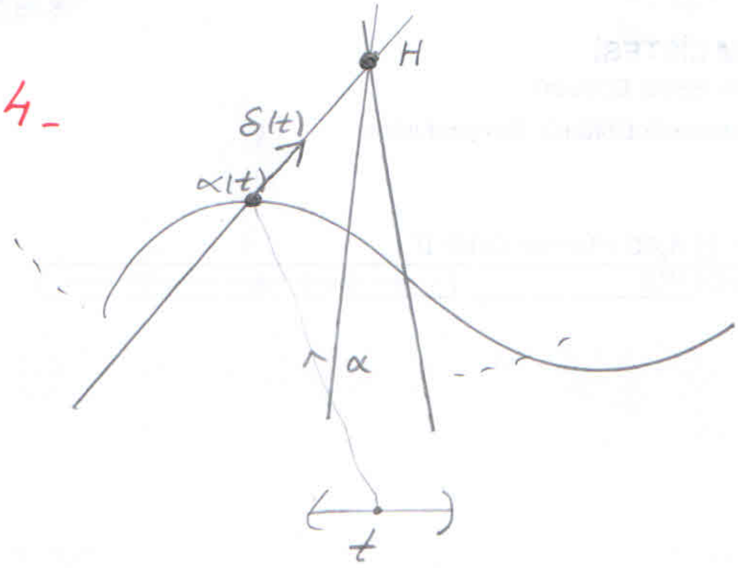
$$|J(F,P)| = -12x^3(P)y^3(P) - 3y^5(P)$$
$$= -3y^3(P)[4x^3(P) + y^2(P)] \quad P = (p_1, p_2) \in E^2$$
$$= -3p_2^3[4p_1^3 + p_2^2]$$

$$\Rightarrow -3p_2^3\{4p_1^3 + p_2^2\} = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \text{ ve } 4p_1^3 + p_2^2 = 0.$$

Bunun anlamı $P = (p_1, p_2) \in E^2$ noktası için

$p_2 = 0$ veya $4p_1^3 + p_2^2 = 0$ sağlayan P noktalarının komşuluğunda F difeomorfizm değildir. Aksi haldeki tüm P noktalarının komşuluğunda F difeomorfizm olur.

4-



P → Koni yüzeyi üzerinde bir nokta

$H=(2,1,1)$ → Koninin geçtiği sabit nokta (tepe)

$\alpha(t)$ → Dayanak eğrisi

$\delta(t) = H - \alpha(t)$ olmak üzere afin aksiyomlarından

$P = (p_1, p_2, p_3) = \alpha(t) + \lambda\,\delta(t)$ yazılır.

$\Rightarrow$ $\underbrace{P = (1-\lambda)\,\alpha(t) + \lambda H}_{\text{Koninin vektörel denklemi}}$ elde edilir. Buna göre

$$P = (p_1, p_2, p_3) = (1-\lambda)(t^2, t, 0) + \lambda(2,1,1)$$

$$\begin{cases} p_1 = t^2 + \lambda(2-t^2) \\ p_2 = 1 + \lambda(1-t) \\ p_3 = \lambda \end{cases}$$

yazılır. t ve λ yok edilerek

$\lambda = p_3$ olduğundan $p_2 = 1 + p_3(1-t)$

$\Rightarrow t = \dfrac{p_3 - p_2 + 1}{p_3}$ dır. Böylece,

$$p_1 = \left(\frac{p_3 - p_2 + 1}{p_3}\right)^2 + p_3\left[2 - \left(\frac{p_3 - p_2 + 1}{p_3}\right)^2\right]$$

bulunur.

$$\begin{cases} P_1 \to x \\ P_2 \to y \\ P_3 \to z \end{cases}$$ denilirse koni yüzeyinin denklemi

$$x = \left(\frac{z-y+1}{z}\right)^2 + z\left[2 - \left(\frac{z-y+1}{z}\right)^2\right]$$

şeklinde bulunur.

5- E^n nin bir topolojik uzay olduğu biliniyor.

1- E^n Hausdorff Uzay

$\forall P, Q \in E^n$ ve $P \neq Q$ alalım. $d(P,Q) = \varepsilon$ olsun.

$B_1(P, \frac{\varepsilon}{3})$ ve $B_2(Q, \frac{\varepsilon}{3})$ açık yuvarlar E^n de açık alt kümelerdir. Kabul edelim ki $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun. Yani

$\exists x \in B_1 \cap B_2$ var olsun.

$\Rightarrow x \in B_1$ ve $x \in B_2$

$\Rightarrow d(P,x) < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $d(Q,x) < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Ayrıca

$d(P,Q) \leq d(P,x) + d(x,Q)$ olduğundan

$\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ bulunur ki bu bir çelişki olur. Dolayısıyla $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ dır. O halde E^n, Hausdorff uzay

2- E^n, sonlu sayıda alt küme ile örtülebilir

E^n topolojik uzay olduğundan E^n nin kendisi açıktır. $E^n \subset E^n$ olup E^n bir tane E^n ile örtülebilir.

3- Homeomorfluk

$U \subset E^n$ açık alt kümesi için

$$I : U \subset E^n \longrightarrow U \subset E^n$$
$$x \longrightarrow I(x) = x$$

birim dönüşümü homeomorfizmdir. O halde E^n, bir topolojik manifolddur.